# משפט

תהיינה f,g פונקציות המוגדרות בסביבת ורציפות ב. אזייי גם ו רציפות ב. בנוסף לכך אם אזי רציפה ב.

## הוכחה

ידוע לנו שאם הגבולות קיימים. אזי , . לפי הרציפות ב של f וg לכן . באופן דומה לגבי

## דוגמאות

1. לכל הינה פונקציה רציפה בכל נקודה . אמנם .
2. הינה רציפה בכל
3. רציפה בכל , ואז ו רציפות בכל נקודה
4. מכאן כל פולינום הינו פונקציה רציפה בכל .
5. לכן כל פונקציה רציונלית: באשר רציונאלים ו רציפה בכל נקודה כך ש.
6. הפונקציה הינה רציפה בכל נקודה לא רציונאלית ואינה רציפה בשום נקודה רציונאלית.

## תרגיל

לחשב את הגבול כאשר או להוכיח שהוא לא קיים.

## תרגיל

לבנות דוגמה של פונקציה כך שהיא רציפה אך ורק בנקודות רציונאליות.

# משפט

נניח שg רציפה ב, ןשf רציפה ב, אזי רציפה ב

## הוכחה

יהי . צ"ל: קיים כך שאם אזי .

קיים כך שאם אזי . בנוסף לכך קיים כך שאם אזי ואז אם אזי

נניח ש

## דוגמה

איפה זה נופל?

נניח שf מוגדרת בסביבת אבל אינה רציפה ב. אזי קיימות 3 אפשרויות:

1. קיים אבל הוא שונה מ(או לא מוגדרת.
2. קיימים הגבולות החד צדדיים אבל הם שונים
3. לפחות אחד מהגבולות החד צדדיים לא קיים
4. נניח ש קיים. נתבונן בפונ' חדשה . הפונ' g מתלכדת עם f לכל וגם רציפה ב שכן

### דוגמה

קוראים לזה נקודת אי רציפות סליקה – שכן אפשר לסלק אותה

1. :   
   קוראים לזה נקודת אי רציפות מהמין הראשון.
2. לפחות אחד מהגבולות . דוגמאות: . 𝑛 בולות ות מהמין הראשוןייםאך ורק בנקודות רציונאליות., . 𝑛 בולות ות מהמין הראשוןייםאך ורק בנקודות רציונאליות.  
   קוראים לזה נקודת אי רציפות מהמין השני.

# משפט

תהי f פונקציה לא יורדת המוגדרת על אזי תמיד קיימים הגבולות ו במובן הרחב(סופי או אינסופי). אם f חסומה מלעיל (מלרע) אזי () סופי. אם f אינה חסומה מלעיל (מלרע) אזי ()

### הערה

נסח את המשפט הדומה עבור פונקציות לא עולות על

## הוכחה

נוכיח את המשפט במקרה שf חסומה מלעיל. לכל . אזי קיים

*טענה: . אמנם, יהי . קיים כך ש. עבור כל מתקיים => =>*

## תרגיל

הוכח את שאר הטענות של המשפט.

## מסקנות

1. אם f היא פונקציה מונוטונית בקטע הסגור אזי תמיד קיימים הגבולות בקצוות.

### הוכחה

נניח שf לא יורדת. אזי לכל מתקיים

1. תהי f מונוטונית ב, אזי לכל קיימים . לכן לא ייתכן שנקודת אי רציפות של פונקציה מונוטונית בתוך הקטע תהיה מהמין השני, שכן נניח שf חסומה מלעיל ב. f מונוטונית על לכן אפשר ליישם את המשפט הקודם לקטעים

# משפט

אם f רציפה ב ו() אזי קיימת סביבה של בה ()

## הוכחה

נגיד ש. יהי . קיים כך שאם אזי . ז"א אם אזי כלומר:  
| לכן